Методические указания к выполнению расчётно-графической работы по теме

**«Предел и производная функции одной переменной»**

Расчетно-графические работы выполняются командами студентов (по 3-4 человека) и заключаются в выполнении заданий, оформлении отчета и его защите в форме доклада. Сформированные команды сами выбирают себе номер от 1 до 8 так, чтобы у каждой команды он был уникальный. Защита работ проходит в конце модуля.

К расчетно-графической работе предъявляются следующие требования:

1. **к выполнению заданий** – в работе должны быть:
   1. представлены в логической последовательности основные этапы исследования или решения;
   2. указаны используемые теоретические положения и методы;
   3. получены точные численные результаты и построены требуемые графические изображения;
2. **к оформлению отчета** – отчет должен быть выполнен в электронном виде в одном из следующих форматов: doc, docx или ppt, pptx (для ppt, pptx используется шаблон Университета ИТМО (ИСУ –> Полезные ссылки –> Корпоративная стилистика –> Презентации (в самом низу)),

а затем, если нет анимаций, переведён в **pdf**, и содержать:

* 1. титульный лист/слайд (название дисциплины, номер модуля, учебный год, название РГР, ФИ исполнителя, номера групп, дата, место (Университет ИТМО));
  2. условия всех заданий;
  3. основные этапы решения (исследования) каждой задачи, его теоретическое обоснование, численные результаты;
  4. графики или рисунки, иллюстрирующие решение каждой задачи (выполненные в математическом редакторе Desmos: [https://www.desmos.com/](https://www.desmos.com/calculator) или Geogebra: <https://www.geogebra.org/> ). В случае интерактивных графиков и рисунков допускается вставить в отчёт вместо них ссылки на рабочие листы математического редактора и при защите демонстрировать их отдельно;
  5. выводы;
  6. оценочный лист (для работы, выполненной командой; при этом вклад каждого исполнителя оценивается всей командой по шкале от 0 до 5 баллов).

1. **к докладу** – для доклада отводится от 7 до 10 минут. Доклад подкрепляется демонстрацией отчёта, который выводится на экран ноутбука или проецируется на экран в мультимедийной аудитории. Во время доклада оценивается качество устного изложения материала и ответы на вопросы по теме работы. Доклад должен содержать:
2. постановку задачи;
3. изложение основных этапов исследования или решения;
4. ссылки на теоретический материал, используемый при исследовании и решении;
5. результаты исследования или решения и их оценку;
6. выводы.

**Задание 1. Пределы**

Дана последовательность  и функция . Исследуйте поведение предложенных величин:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1) | Вычислите предел последовательности при , исследуйте её на монотонность и ограниченность. | Вычислите предел функции при , исследуйте её на монотонность и ограниченность. |
| 2) | Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера *n*. | Постройте график функции в зависимости от *x*. |
| 3) | Проиллюстрируйте сходимость (расходимость), ограниченность и монотонность последовательности: | Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) ограниченность и монотонность функции на бесконечности: |
| а) | вспомните определение сходимости (расходимости), ограниченность и монотонность последовательности; | вспомните определение сходимости (расходимости), ограниченность и монотонность функции в на бесконечности; |
| б) | выберите три различных положительных числа ,  и ; | |
| в) | для каждого такого числа изобразите на графике -окрестность («-трубу») | |
| г) | и найдите на графике номер , начиная с которого все члены последовательности попадают в -окрестность или установите, что такого номера нет. | и найдите на графике -окрестность, в которой все значения функции попадают в -окрестность или установите, что такой окрестности нет. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № команды |  |  |
| 1. |  |  |
| 2. |  |  |
| 3. |  |  |
| 4. |  |  |
| 5. |  |  |
| 6. |  |  |
| 7. |  |  |
| 8. |  |  |

**Задание 2. Дифференциал**

Дана задача. Проведите исследование:

1. Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.
2. Решите задачу аналитически.
3. Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Сверьтесь с аналитическим решением.
4. Запишите ответ.

|  |  |
| --- | --- |
| № команды | Задача |
| 1. | На сколько изменится объём шара, если его радиус изменится на величину ? С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара, чтобы его объём можно было определить с точностью до одного процента? |
| 2. | Вычислите приближённо площадь кругового кольца при изменении радиуса *R* на величину . |
| 3. | Сторона куба *x* *=* 5 м  0,01 м. Вычислите абсолютную и относительную погрешности при вычислении объёма куба. |
| 4. | Период колебания маятника , где *l* – длина маятника в сантиметрах. Как нужно изменить длину маятника *l* *=* 20 см, чтобы период колебания уменьшился на 0,1 с? |
| 5. | Период колебания маятника , где *l* – длина маятника в сантиметрах, *g* – ускорение силы тяжести (*g* *=* 981 см/с2). Какое влияние на погрешность при вычислении *T* окажет погрешность в 1% при изменении длины маятника? |
| 6. | Ток *I* определяется по тангенс-гальванометру по формуле . Пусть  – ошибка, допущенная при отсчёте угла . Найдите абсолютную и относительную погрешности при определении *I*. При каком  относительная погрешность будет минимальной? |
| 7. | По данному расстоянию *d* светящейся точки от оптического центра двояковыпуклого стекла может быть вычислено расстояние *f* её изображения согласно формуле , где *F* – постоянная для данного стекла и данного сорта лучей. Как влияет погрешность в измерении *d* на погрешность в вычислении *f* ? |
| 8. | Длина телеграфного провода , где 2*b* – расстояние между точками подвеса, а *f* – наибольший прогиб. На сколько увеличится прогиб *f* , когда провод от нагревания увеличится на ? |

**Задание 3. Наибольшее и наименьшее значения функции**

Дана задача. Проведите исследование:

1. Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.
2. Решите задачу аналитически.
3. Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Сверьтесь с аналитическим решением.
4. Запишите ответ.

|  |  |
| --- | --- |
| № команды | Задача |
| 1. | Проектируется канал оросительной системы с прямоугольным сечением, равным 6,5 кв. метров. При каких линейных размерах сечения на облицовку стенок канала пойдет наименьшее количество материала? |
| 2. | Из куска металла, ограниченного линиями , ,  требуется выпилить деталь прямоугольной формы с наибольшей площадью. |
| 3. | В кинотеатре 1000 мест. Администрация установила, что спрос на билеты зависит от их цены линейно: при цене на билет 200 руб. спрос равен 10 ед., при цене 1000 руб. – 5 ед. Определите наиболее выгодную цену билетов. |
| 4. | По результатам агрономического опыта была установлена квадратичная зависимость между среднесуточной температурой, при которой выращивалась пшеница нового сорта и ее урожайностью. Результаты опыта представлены в таблице. Найдите оптимальную температуру, которая обеспечит максимальный урожай.   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Температура, оС | 14 | 16 | 22 | | Урожайность, кг/м2 | 0,91 | 1,06 | 0,88 | |
| 5. | Тело остывает по экспоненциальному закону. Известно, что в начальный момент времени, температура тела была равна 320 градусов, а за неограниченное время она сравняется с температурой окружающего воздуха (20 градусов). Начальная скорость остывания равнялась -50 градусов в минуту. Найдите зависимость скорости остывания от времени. |
| 6. | Эпидемия распространяется среди населения по квадратичному закону. Статистика числа заболевших приведена в таблице. Найдите скорость изменения числа заболевших и в какое время эпидемия пойдет на спад.   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Время, недели | 0 | 5 | 10 | | Число заболевших | 0 | 5250 | 9000 | |
| 7. | Три пункта *A*, *B* и *C* расположены не на одной прямой; . Из точки *A* выходит автомобиль, одновременно из точки *B* – поезд. Автомобиль движется по направлению к *B* со скоростью 80 км/ч, поезд – по направлению к *C* со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если *AB* = 200 км? |
| 8. | От канала шириной 2 м под прямым углом отходит канал шириной 4 м. Стенки каналов прямолинейны. Найдите наибольшую длину бревна *l*, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой. |

**Задание 4. Исследование функции**

Даны функции  и . Проведите поочерёдно их полные исследования:

1. Найдите область определения функции.
2. Проверьте, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и укажите, как эти свойства влияют на вид графика функции.
3. Исследуйте функцию на нулевые значения и найдите промежутки ее знакопостоянства.
4. Исследуйте функцию с помощью первой производной: найдите интервалы монотонности и экстремумы функции.
5. Исследуйте функцию с помощью второй производной: найдите интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции.
6. Проверьте наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.
7. Найдите точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найдите значения функции в некоторых дополнительных точках.
8. Постройте график. Отметьте на нём все результаты исследования.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № команды |  |  |
| 1. |  |  |
| 2. |  |  |
| 3. |  |  |
| 4. |  |  |
| 5. |  |  |
| 6. |  |  |
| 7. |  |  |
| 8. |  |  |